Kor. 1.4 Sei $0 \neq M \in \mathcal{O}$. $\exists$ $\mathfrak{g}$-Filtrierung von M

$$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \cdots \subsetneq M_n = M, \quad M_{i+1}/M_i \text{ HGM}$$

Beweis: $\exists$ $\mathfrak{b}$-Untermodul $V \subseteq M$, $\dim V < \infty$, $M = \mathcal{U}(\mathfrak{g})V$.

$\exists\ \lambda \in \Pi(V)$ maximal, $v \in V_\lambda \setminus 0$.

$M_1 := \mathcal{U}(\mathfrak{g})v$

$$\begin{array}{ccccccccc}
M & \supsetneq & M_n & \cdots & M_2 & \supseteq & M_1 & \supsetneq & V \\
\downarrow & & & & & & \downarrow & & \downarrow \\
M/M_1 = \bar{M}_n & \supsetneq & \cdots & \supsetneq & \bar{M}_2 & \supsetneq & 0 & & \bar{V}
\end{array}$$

$M/M_1 = 0$: nichts zu tun

$\dim M/M_1 > 0$: $\dim \bar{V} < \dim V$ nach Ind $\exists\ \bar{M}_i$: $\bar{M}_{i+1}/\bar{M}_i$ HGM

D.

Def. 1.5 Sei $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Da $\mathfrak{h} = \mathfrak{b}/[\mathfrak{b},\mathfrak{b}]$,

def. λ einen eind. Charakter von $\mathfrak{b}$ (auch mit λ bez.).

$\mathfrak{b}$-Wirkung durch λ auf : $\mathbb{C}_\lambda$. Definiere

$$M(\lambda) = \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \underset{\mathcal{U}(\mathfrak{b})}{\otimes} \mathbb{C}_\lambda \quad \text{Verma-Modul}$$

$$x(u \otimes z) := xu \otimes z.$$

Prop. 1.6 (1) $(M(\lambda), v_\lambda := 1 \otimes 1)$ ist HGM zum Gew. λ, $v_\lambda \neq 0$.

(2) $(M(\lambda), v_\lambda)$ ist universell: $\forall (M, v)$ HGM zum Gew. λ.

$$\exists! \quad \begin{tikzcd} M(\lambda) \arrow[r, "\mathcal{U}(\mathfrak{g})\text{-lin.}"] & M \\ \mathbb{C} \arrow[u, "v_\lambda"] \arrow[r, equal] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{C} \arrow[u, "v"'] \end{tikzcd}$$

<u>Beweis</u> (1) $\quad M(\lambda) = \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-) \otimes \mathbb{C}_\lambda$ als $\mathfrak{h}$-Moduln

$\Rightarrow v_\lambda \neq 0$. Rest ist klar.

(2) $\quad I := \mathrm{Ann}_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} v_\lambda = \{ u \mid u v_\lambda = 0 \}$

$\overset{\text{PBW}}{\Rightarrow} \quad I = \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \{ x \in \mathfrak{h} \mid x - \lambda(x) \}$.

$\Rightarrow \quad I \subseteq \mathrm{Ann}_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} v \quad \Rightarrow \quad$ Beh. $\square$

<u>Def. 1.7</u> $\quad L(\lambda) :=$ einfacher Quotient von $M(\lambda)$.

<u>Kor. 1.8</u> Die $L(\lambda)$, $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, sind ein Repräsentantensystem einfacher Moduln in $\mathcal{O}$. Weiter

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(L(\lambda), L(\mu)) = \begin{cases} 0 & \lambda \neq \mu \\ \mathbb{C}\, \mathrm{id}_{L(\lambda)} & \lambda = \mu. \end{cases}$$

<u>0.3</u> Gewichte

$\langle\, ,\rangle :=$ zur Killingform $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}(\cdot)\mathrm{ad}(\cdot))$ duale symm. Bilinearform auf $\mathfrak{h}^*$

$\langle\, ,\, \rangle \gg 0$ auf $\langle \Phi \rangle_{\mathbb{R}}$.

$\forall \alpha \in \Phi: \quad \alpha^\vee := \dfrac{2\alpha}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$.

Es gilt $\forall \alpha, \beta \in \Phi: \quad \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z}$.

Mit $\Lambda := \{ \lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \langle \lambda, \Phi^\vee \rangle \subseteq \mathbb{Z} \}$ Gewichtsgitter:

$$\begin{matrix} \Lambda \\ \cup \\ \Lambda_r \supseteq \Phi \end{matrix}$$

Setze $\langle \varpi_j, \alpha_i^\vee \rangle := \delta_{ji}$ Fundamentalgewichte

$$\Rightarrow \Lambda = \bigoplus_{j=1}^{\ell} \mathbb{Z}\varpi_j .$$

<u>Prop. 1.9</u> Seien $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, $\alpha_i \in \Delta$ (d.h. $1 \le i \le \ell$, α_i einfach).

Ist $n := \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \in \mathbb{N}$, so ist mit $\mu := \lambda - (n+1)\alpha_i$

$0 \neq v := y_i^{n+1} v_\lambda \in M(\lambda)_\mu$ maximaler Vektor.

Insbes. $\exists\ 0 \neq \left(M(\mu) \xrightarrow{\text{g-hom}} M(\lambda) \right)$, $\operatorname{im}(\dots) \subseteq N(\lambda) := \ker(M(\lambda) \to L(\lambda))$

<u>Beweis</u> $\forall h \in \mathfrak{h}$: $hv = y_i^{n+1} h v_\lambda + \underbrace{[h, y_i^{n+1}]}_{-(n+1)\alpha_i(h) y_i^{n+1}} v_\lambda = \mu(h) v_\lambda$.

PBW $\Rightarrow v \neq 0$.

Noch zu zeigen: v maximal. Da $x_1, \dots, x_\ell$ $\mathfrak{n}^+$ als Alg. erzeugen $\Rightarrow$ reicht zu zeigen $x_j v = 0 \ \forall j = 1, \dots, \ell$.

$j \neq i$: $\left.\begin{matrix} [x_j, y_i] = 0 \\ x_j v_\lambda = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_j v = [x_j, y_i^{n+1}] v_\lambda = 0$

$$x_i v \underset{x_i v_\lambda = 0}{=} [x_i, y_i^{n+1}] v_\lambda = \sum_{a+b=n} y_i^a \underbrace{[x_i, y_i]}_{h_i} y_i^b v_\lambda$$

$$= \sum_{a+b=n} y_i^a \underbrace{\left([h_i, y_i^b] + y_i^b h_i \right) v_\lambda}_{(\underbrace{\lambda(h_i)}_{n} - \underbrace{b\alpha_i(h_i)}_{2b}) y_i^b v_\lambda} = (n+1)\left(n - \tfrac{n}{2}\cdot 2\right) v = 0. \qquad \square$$

<u>Kor. 1.10</u> Unter den Voraussetzungen von Prop. 1.9. gilt

$$y_i^{n+1} v_\lambda = 0 \qquad \text{in } L(\lambda).$$

<u>Übung</u> 1.11 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) = \langle h, x, y \rangle_{\mathbb{C}}$. Man zeige:

(1) $$M(\lambda) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathbb{C} \underbrace{v_i}_{\neq 0}, \quad \begin{cases} h v_i = (\lambda - 2i) v_i \\ x v_i = \begin{cases} (\lambda - i + 1) v_{i-1} & i > 0 \\ 0 & i = 0 \end{cases} \\ y v_i = (i+1) v_{i+1}. \end{cases}$$

(2) $M(\lambda)$ einfach $\Leftrightarrow$ $\lambda \notin \mathbb{N}$

$\lambda \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \dim L(\lambda) < \infty \Leftrightarrow \exists$ kurze ex. Seq.

$$0 \longrightarrow L(-\lambda-2) \longrightarrow M(\lambda) \longrightarrow L(\lambda) \longrightarrow 0$$

(3) $M(\lambda) \otimes M(\mu) \notin \mathcal{O}$.

0.4. Weylgruppe

Sei $W \leq O(\mathfrak{h}^*)$ die von

$$s_\alpha(\beta) = \beta - \langle \beta, \check{\alpha} \rangle \alpha \quad , \alpha \in \Phi,$$

erzeugte Gruppe. Dann $W = \langle s_i \mid s_{\alpha_i} = s_i,\ i = 1, \dots, \ell \rangle$.

$W \curvearrowright \Phi, \Lambda_r, \Lambda \leq \mathfrak{h}^*$, einfach transitiv auf positiven/einfachen Systemen.

Theorem 1.12 Sei $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Äq. sind

(1) $\dim L(\lambda) < \infty$ (2) $\lambda \in \Lambda_+ := \{\mu \mid \langle \mu, \Phi^\vee \rangle \leq \mathbb{N}\}$

$$= \langle \varpi_j \mid j = 1, \dots, \ell \rangle_{\mathbb{N}}$$

(3) $\forall \mu \in \mathfrak{h}^*, w \in W: \quad \dim L(\lambda)_\mu = \dim L(\lambda)_{w\mu}$.

Beweis $\mathfrak{s}_i := \langle h_i, x_i, y_i \rangle_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}), i = 1, \dots, \ell$.

(1) $\Rightarrow$ (2): $\infty > \dim \mathfrak{s}_i v_\lambda \geq \dim L^{\mathfrak{s}_i}(\lambda(h_i)) \overset{\text{Übung}}{\Rightarrow} \lambda(h_i) \in \mathbb{N}$.

(3) $\Rightarrow$ (1) $\mu \in \Pi(L(\lambda)) \Rightarrow w\mu \in \Pi(L(\lambda)) \Rightarrow w\mu \leq \lambda \ \forall w \in W$

$\exists w \in W: \quad w\mu \in \Lambda_+$. Damit

$$\dim L(\lambda) \leq \sum_{\Lambda_+ \ni \mu \leq \lambda} \#W \cdot \dim L(\lambda)_\mu < \infty.$$

(2) ⇒ (3): $\quad m := \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \in \mathbb{N} \overset{\text{Kor. 1.10}}{\Longrightarrow} y_i^{m+1} v_\lambda = 0$

$\Rightarrow \quad \mathcal{U}(\mathfrak{s}_i) v_\lambda < \infty$. Sei

$M = \sum \{ N \subseteq L(\lambda)|_{\mathfrak{s}_i} \mid \dim N < \infty \}$. Gesehen: $M \neq 0$.

Sei $N \subseteq L(\lambda)|_{\mathfrak{s}_i}$, $\dim N < \infty$. Dann

$$N \subseteq \underset{\dim \leq (\dim \mathfrak{g})(\dim N) < \infty}{\underbrace{\operatorname{im}(\mathfrak{g} \otimes N \longrightarrow M)}} \subseteq M$$

$\Rightarrow \quad M$ $\mathfrak{g}$-invariant $\Rightarrow L(\lambda) = M$.

Damit: x_i, y_i lokal nilpotent auf M und

$r_i := e^{x_i} e^{-y_i} e^{x_i} \in \operatorname{End}(L(\lambda))$.

$h \in \mathfrak{h}$:
$$\begin{aligned}
e^{\operatorname{ad}(x_i)}(h) &= h + [x_i, h] + \tfrac{1}{2}[x_i,[x_i,h]] + \dots \\
&= h - \alpha_i(h)\, x_i \\
e^{-\operatorname{ad}(y_i)}(h) &= h - \alpha_i(h)\, y_i \\
\cancel{e^{\operatorname{ad}(x_i)}(y_i)} &\cancel{= y_i + [\overbrace{x_i, y_i}^{h_i}] + \tfrac{1}{2}[x_i, [\overbrace{x_i, y_i}^{h_i}]] + \dots} \\
&\cancel{= y_i + h_i - x_i} \\
e^{-\operatorname{ad}(y_i)}(x_i) &= x_i + h_i - y_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \operatorname{Ad}(r_i)(h) &= e^{\operatorname{ad}(x_i)} e^{-\operatorname{ad}(y_i)} (h - \alpha_i(h)\, x_i) \\
&= e^{\operatorname{ad}(x_i)} \underbrace{\big(h - \alpha_i(h) y_i - \alpha_i(h)(x_i + h_i - y_i) \big)}_{h - \alpha_i(h) h_i - \alpha_i(h)\, x_i} \\
&\underset{\alpha_i(h_i) = 2}{=} h - \alpha_i(h) h_i \underbrace{- \alpha_i(h) x_i + 2\alpha_i(h) x_i - \alpha_i(h) x_i}_{= 0}
\end{aligned}$$

Damit $\quad h r_i v = r_i \, Ad(\underbrace{r_i^{-1}}_{=r_i})(h)\, v = \underbrace{(\mu(h) - \overbrace{\mu(h_i)}^{\langle \mu, \alpha_i^\vee \rangle} \cdot \alpha_i(h))}_{s_i(\mu)} r_i v$

und $\quad r_i : L(\lambda)_\mu \xrightarrow{\cong} L(\lambda)_{s_i(\mu)} \quad \Rightarrow \quad$ Beh. $\square$.

Bem. 1.13 Auch gezeigt:
M HGM zum Gew λ, $\forall i$ $\mathfrak{g}_{-\alpha_i}$ $\curvearrowright M$ lok nilpotent

$\Rightarrow \quad \dim M < \infty, \quad M \cong L(\lambda), \ \lambda \in \Lambda_+$.

Kor. 1.14 $\quad \lambda \in \Lambda_+$.

(1) $w \in W$, $\alpha \in \Phi$: nicht beide Gew. $w\lambda \pm \alpha$ kommen in $L(\lambda)$ vor. (Sonst wäre $\lambda \pm w^{-1}\alpha \le \lambda$ ↯.)

(2) $\mu \in \Pi(L(\lambda))$, ~~$w \in W$~~, $\alpha \in \Phi$, $k \in \mathbb{Z}$: $\quad \mu, \mu + k\alpha \in \Pi(L(\lambda))$
$\Rightarrow \forall i \in (0,k) : \mu + i\alpha \in \Pi(L(\lambda))$

(3) $L(\lambda)^* \cong L(-w_0\lambda)$ $\quad$ (μ Gew von $L(\lambda) \Rightarrow w_0^{-1}\mu \in \Pi(L(\lambda))$)
w_0 = längstes Element von W

$\left(w_0^{-1}\mu \le \lambda \Leftrightarrow \lambda - w_0^{-1}\mu = \sum_{\alpha \in \Phi^+} n_\alpha \alpha \right.$

$\Leftrightarrow w_0\lambda - \mu = -\sum_{\beta \in \Phi^+} m_\beta \cdot \beta$

$\Leftrightarrow -w_0\lambda \le \mu$

$\left. \Rightarrow -w_0\lambda \text{ kleinstes Gewicht von } L(\lambda). \right)$

↳ 8.11.2013

Nächstes Ziel: Objekte in $\mathcal{O}$ haben endliche Länge.
Dazu: Wirkung von $Z(\mathfrak{g})$ = Zentrum von $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

Def. 1.15 $\quad$ ~~Z~~ (M, v) HGM zum Gewicht λ ($v \neq 0$).

$Z(\mathfrak{g})\, M_\lambda \le M_\lambda \quad \Rightarrow \quad \exists$ Char $\chi_\lambda : Z(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathbb{C}$ mit
$\forall z \in Z(\mathfrak{g}), w \in M: \ zw = \chi_\lambda(z) w$.